ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  Θ Α. Βαρόπουλος (1894 – 1957)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑΣ
1984

Θέματα 2ου Μαθηματικού Διαγωνισμού «Θ Α Βαρόπουλος»

μαθητών Α΄ τάξης Γυμνασίων Αιτωλοακαρνανίας

1. Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί α, β, γ και δ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:
$$\alpha+\beta=17, \qquad \beta-\gamma=11 \quad \text{και} \quad \gamma+\delta=19.$$
Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x=11\alpha+13\beta+6\gamma+8\delta$ είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

2. Δίνονται οι αριθμοί $a=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\ldots+\frac{2015}{2016}+\frac{2016}{2017}$ και $\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2016}+\frac{1}{2017}$.
   i. Να συγκριθούν οι αριθμοί a και β.
   ii. Να βρείτε το άθροισμα $a+\beta$.
3. Αν ο φυσικός αριθμός κ, είναι πρώτος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των αριθμών 24, 36, 162, να βρείτε τις δυνατές τιμές του κ, καθώς επίσης και του αριθμού
$$A=\frac{\frac{\kappa}{4}+1}{3-\frac{\kappa}{2}}:\frac{\frac{24-8\kappa}{5}}{\kappa}$$
4. Δίνονται οι αντικείμενες ημιευθείες Οψ και Οχ. Φέρνουμε τις ημιευθείες Οκ και Childλ και σχηματίζουμε τις διαδοχικές γωνίες $\widehat{\psi O\kappa}=\hat{\alpha}$, $\widehat{\kappa O\lambda}=\hat{\beta}$, $\widehat{\lambda O\chi}=\hat{\gamma}$. Αν τα μέτρα των γωνιών $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$ είναι ανάλογα των αριθμών 10, 5 και 3 αντίστοιχα να βρείτε τα μέτρα των γωνιών $\hat{\alpha}$ - $\hat{\beta}$ και $\hat{\beta}-\hat{\gamma}$.

Καλή επιτυχία

Παράρτημα Αιτωλοακαρνανίας **Ε**λληνικής **Μ**αθηματικής **Ε**ταιρείας
• Σαλάκου και Δαγκλή, Αγρίνιο • ☎ 2641033375, 26410567777, 6973538272 •
mail@eme.ait.sch.gr • http://blogs.sch.gr/emeait/

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ - ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑΣ
3ος ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
«Θ. Α. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2018

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνονται οι αριθμοί

$$\mathrm{A}=\left(7^2+4^2\right):\left(2\cdot 11-3^2\right)+6^2\cdot\left(5^2-4\cdot 6\right)^{2018}+4$$

και

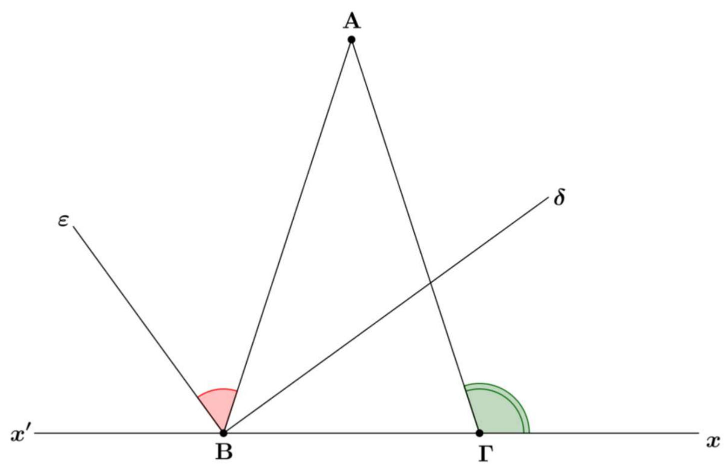
$$\mathrm{B}=\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right):\frac{11}{3}+\frac{2}{5}\cdot\left(4\frac{1}{3}-2\right)+\frac{2}{3}:\frac{1}{25}.$$

α. Να βρείτε τους αριθμούς A και B.
β. Να βρείτε το $\text{ΕΚΠ}\left(\mathrm{A},\mathrm{B}\right)$ και τον $\text{ΜΚΔ}\left(\mathrm{A},\mathrm{B}\right)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $\mathrm{ΑΒΓ}$ είναι ισοσκελές με βάση $\mathrm{ΒΓ}$, η ημιευθεία $\mathrm{B}\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{Α\hat{Β}Γ}$ και η ημιευθεία $\mathrm{B}\varepsilon$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}}x'$. Δίνεται ακόμη ότι η γωνία $\mathrm{A\hat{B}}\varepsilon$ είναι ίση με τα $\frac{3}{5}$ της ορθής γωνίας.

α. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}}\varepsilon$ σε μοίρες.
β. Να εξηγήσετε γιατί η γωνία $\delta\mathrm{\hat{B}}\varepsilon$ είναι ορθή.
γ. Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A\hat{Γ}}x$.



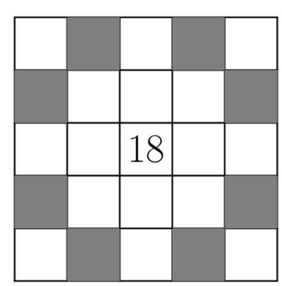
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Ο μπαμπάς της Βασιλικής θέλει να της κάνει ένα δώρο για τα γενέθλιά της. Όμως, επειδή είναι λίγο αφηρημένος, δεν θυμάται την ακριβή ημερομηνία γέννησής της! Αν υποθέσουμε ότι η Βασιλική γεννήθηκε στις $\alpha/\beta/2014$ (όπου το α δηλώνει την ημέρα και το β τον μήνα της ημερομηνίας) και $\alpha\cdot\beta=153$, τότε:

α. Να βρείτε πότε έχει γενέθλια η Βασιλική.
β. Να βρείτε την ακριβή ηλικία της Βασιλικής τη σημερινή ημερομηνία που παίρνετε μέρος στον μαθηματικό διαγωνισμό.
γ. Να βρείτε την ακριβή ηλικία της Βασιλικής σε 1372 ημέρες από σήμερα.
(Να θεωρήσετε ότι κάθε έτος έχει 365 ημέρες και κάθε μήνας έχει 30 ημέρες).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Στο διπλανό ***μαγικό τετράγωνο***, οι αριθμοί $1,2,\ldots,25$ τοποθετούνται στα μικρά τετραγωνάκια με τέτοιον τρόπο, ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο του τετραγώνου να είναι το ίδιο. Αν ο αριθμός 18 τοποθετηθεί στο κεντρικό τετραγωνάκι, να βρείτε το άθροισμα των αριθμών στα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα.



Να δικαιολογείτε την απάντησή σας σε κάθε πρόβλημα.
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες. ***Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες***

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ - ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑΣ
4ος ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
«Θ. Α. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2019

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνονται οι αριθμοί

$$\mathrm{A} = 2^2 \cdot \left[\left(3^2 - 7\right) + \left(3 \cdot 2^3 - 10^2 : 5\right)\right] - \left(6^2 : 18\right) \cdot 11$$

και

$$\mathrm{B} = \left(7^2 - 2^2 \cdot 12\right)^{2019} + \left(2 \cdot 3^3 - 153 : 3\right) \cdot \left(4^3 - 2 \cdot 5^2\right) - 4 \cdot \left(2 \cdot 13 - 4^2\right).$$

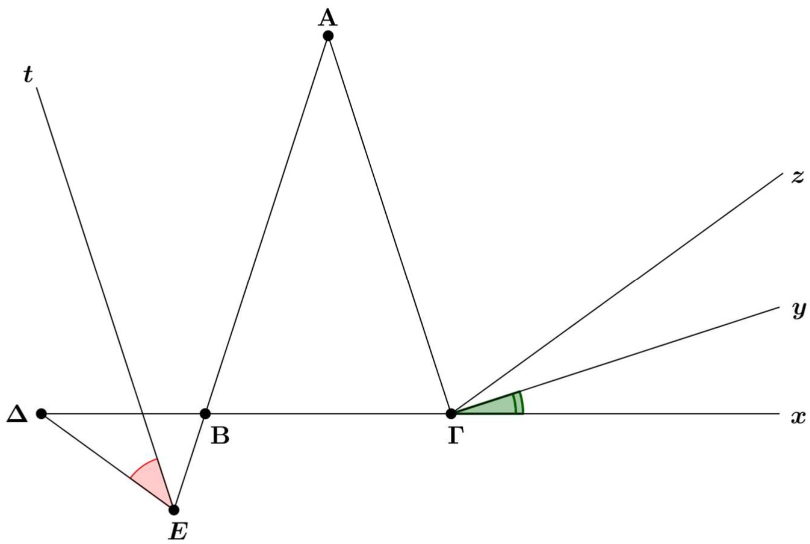
α. Να βρείτε τους αριθμούς A και B.

β. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\Gamma = \dfrac{\left(2 \cdot \mathrm{A}\right)^3 \cdot \mathrm{B}^2}{\left(\mathrm{A}+1\right)^3 \cdot \left(\mathrm{B}+1\right)}$ σε ισοδύναμο ανάγωγο κλάσμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν τα εξής:

- Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με βάση $\mathrm{B\Gamma}$.
- Το τρίγωνο $\Delta\mathrm{BE}$ είναι ισοσκελές με βάση BE.
- Η ημιευθεία Γy είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{\Gamma}z$.
- Η ημιευθεία $\mathrm{E}t$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta$.
- Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}y$ είναι ορθή.
- Η γωνία $t\hat{\mathrm{E}}\Delta$ είναι ίση με τα $\dfrac{2}{5}$ της ορθής γωνίας.



α. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $x\hat{\Gamma}y$ σε μοίρες.

β. Να εξηγήσετε γιατί η ημιευθεία $\Gamma\mathrm{A}$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}z$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Η Ειρήνη ετοίμασε μια έκπληξη για τους φίλους της στα γενέθλιά της. Έβαλε σε ένα κουτί ένα δώρο και το κλείδωσε με ένα λουκέτο που είχε έναν τετραψήφιο κωδικό αριθμό. Για να βρουν οι φίλοι της τον κωδικό, τους έδωσε τις παρακάτω πληροφορίες:

« • *Ο αριθμός που ψάχνεις έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά.*
- *Το ψηφίο των δεκάδων του είναι ίσο με το τετράγωνο του ψηφίου των χιλιάδων του.*
- *Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι πρώτος αριθμός.*
- *Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού που ψάχνεις είναι ίσο με 27».*

Μπορείτε να βοηθήσετε τους φίλους της Ειρήνης να βρουν τον κωδικό και να ανοίξουν το λουκέτο;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Οι προεδρικές εκλογές στις Η.Π.Α. διεξάγονται κάθε 4 χρόνια, την πρώτη Τρίτη μετά την 1η Νοεμβρίου. Ποια θα είναι η ημερομηνία των εκλογών που θα διεξαχθούν το 2028;

Να δικαιολογείτε την απάντησή σας σε κάθε πρόβλημα.
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες. ***Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες***

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λύσεις θεμάτων 1^{ου} Μαθηματικού Διαγωνισμού «Θ Α Βαρόπουλος»

Θέμα 1^{ο} i. Είναι A= $\dfrac{(36-16)}{(14-9)}+25\cdot 2-4\cdot 29/6-1=\dfrac{20}{5}+50-58/3-1=$

$4+50-58/3-1=53-58/3=\dfrac{159}{3}-58/3=\dfrac{101}{3}$

και B= $\dfrac{9}{20}\cdot\dfrac{20}{9}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{4}+1/20=1-\dfrac{3}{4}+1/20=\dfrac{21}{20}-\dfrac{16}{20}=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$

ii. Επειδή A=$\dfrac{101}{3}$=$\dfrac{1010}{30}$ και B= $\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{30}$ κλάσματα με παρονομαστή 30 μεταξύ του B και του A είναι 1010-9=**1001**

Θέμα 2^{ο} Επειδή 35%+45%=80% οι 12 μαθητές είναι 20% = (100-80)% οπότε το 100% =

$5\cdot 20$% =60 μαθητές. Άρα με τον Ολυμπιακό είναι 0,35·60=**21** μαθητές και

με τον Παναιτωλικό 0,45·60=**27** μαθητές.

Θέμα 3^{ο} Είναι $x\hat{o}z=x\hat{o}y+y\hat{o}z=134^0$ οπότε $x\hat{o}y+x\hat{o}y+34^0=134^0$ => 2 $x\hat{o}y=100^0$

=> $x\hat{o}y$ **= 50^0** και $y\hat{o}z=84^0$.

Επίσης είναι συμπληρωματική της $y\hat{o}z=90^0-84^0=6^0$ και

παραπληρωματική της $y\hat{o}z=180^0-84^0=96^0$.

Θέμα 4^{ο} Όταν το αυτοκίνητο πωλείται αρχικά 100€ με φόρο 23% πωλείται τελικά 123€

>> X€ >> 14760€

Συνεπώς X = $100\cdot\dfrac{14670}{123}=12000$€ αρχική τιμή.

Με αρχική τιμή 100€ και έκπτωση 12% το αυτοκίνητο πωλείται 88€

>> 12000€ >> X’€

Έτσι X’= $88\cdot\dfrac{12000}{100}=88\cdot 120=10560$€

Άρα το αυτοκίνητο θα πωληθεί τελικά $10560\cdot 1.23=12988{,}80$€

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνονται οι αριθμοί

$$\mathrm{A}=\left(7^2+4^2\right):\left(2\cdot 11-3^2\right)+6^2\cdot\left(5^2-4\cdot 6\right)^{2018}+4$$

και

$$\mathrm{B}=\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right):\frac{11}{3}+\frac{2}{5}\cdot\left(4\frac{1}{3}-2\right)+\frac{2}{3}:\frac{1}{25}.$$

α. Να βρείτε τους αριθμούς A και B.
β. Να βρείτε το $\text{ΕΚΠ}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ και τον $\text{ΜΚΔ}(\mathrm{A},\mathrm{B})$.

ΛΥΣΗ

α. Είναι:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(7^2+4^2\right):\left(2\cdot 11-3^2\right)+6^2\cdot\left(5^2-4\cdot 6\right)^{2018}+4=\\&=(49+16):(22-9)+36\cdot(25-24)^{2018}+4=\\&=65:13+36\cdot 1^{2018}+4=5+36\cdot 1+4=5+36+4=\boxed{45}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\mathrm{B}&=\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right):\frac{11}{3}+\frac{2}{5}\cdot\left(4\frac{1}{3}-2\right)+\frac{2}{3}:\frac{1}{25}=\\&=\frac{22}{15}\cdot\frac{3}{11}+\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{13}{3}-\frac{6}{3}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{25}{1}=\\&=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{3}+\frac{50}{3}=\frac{2}{5}+\frac{14}{15}+\frac{50}{3}=\frac{6}{15}+\frac{14}{15}+\frac{250}{15}=\frac{270}{15}=\boxed{18}.\end{aligned}$$

β. Έχουμε $\mathrm{A}=45=3^2\cdot 5$ και $\mathrm{B}=18=2\cdot 3^2$, οπότε $\text{ΕΚΠ}(\mathrm{A},\mathrm{B})=5\cdot 2\cdot 3^2=\boxed{90}$ και $\text{ΜΚΔ}(\mathrm{A},\mathrm{B})=3^2=\boxed{9}$.
(*Μοριοδότηση*: 1,5 μονάδα για τον A, 1,5 μονάδα για τον B, 1 μονάδα για το ΕΚΠ και 1 μονάδα για τον ΜΚΔ).

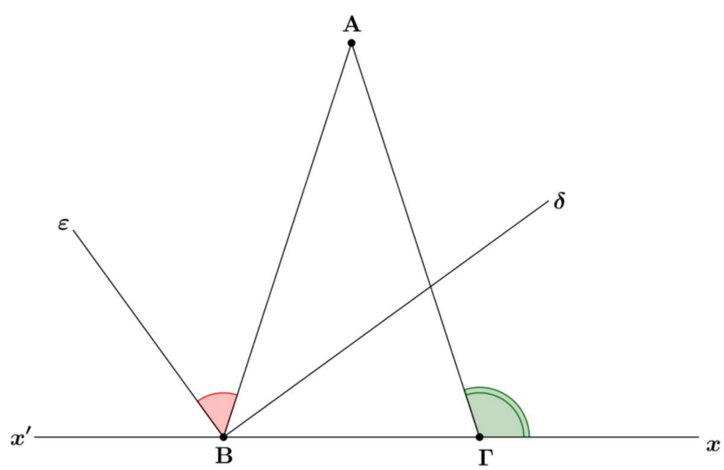
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με βάση $\mathrm{B\Gamma}$, η ημιευθεία $\mathrm{B}\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ και η ημιευθεία $\mathrm{B}\varepsilon$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}}x'$. Δίνεται ακόμη ότι η γωνία $\mathrm{A\hat{B}}\varepsilon$ είναι ίση με τα $\frac{3}{5}$ της ορθής γωνίας.

α. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}}\varepsilon$ σε μοίρες.

β. Να εξηγήσετε γιατί η γωνία $\delta\hat{\mathrm{B}}\varepsilon$ είναι ορθή.

γ. Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A\hat{\Gamma}}x$.



ΛΥΣΗ

α. Το $\frac{1}{5}$ της ορθής γωνίας είναι ίσο με $90^\circ:5=18^\circ$. Άρα, η γωνία $\mathrm{A\hat{B}}\varepsilon$ είναι ίση με $3\cdot 18^\circ=54^\circ$.

β. Επειδή η ημιευθεία $\mathrm{B}\varepsilon$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}}x'$, θα είναι $\mathrm{A\hat{B}}x'=2\mathrm{A\hat{B}}\varepsilon=2\cdot 54^\circ=108^\circ$.
Η γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}}x'$, οπότε θα είναι:

$$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 180^\circ - \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}x' = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ .$$

Επειδή η ημιευθεία $\mathrm{B}\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$, θα είναι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\delta = 72^\circ : 2 = 36^\circ$.

Άρα, θα είναι: $\delta\widehat{\mathrm{B}}\varepsilon = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\varepsilon + \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\delta = 54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$.

γ. Επειδή το τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $\mathrm{B}\Gamma$, θα είναι $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 72^\circ$.

Η ζητούμενη γωνία $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}x$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$, οπότε

$$\mathrm{A}\widehat{\Gamma}x = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ .$$

(*Μοριοδότηση*: 1 μονάδα για το ερώτημα **α.** , 2,5 μονάδες για το **β.** και 1,5 μονάδα για το **γ.**).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Ο μπαμπάς της Βασιλικής θέλει να της κάνει ένα δώρο για τα γενέθλιά της. Όμως, επειδή είναι λίγο αφηρημένος, δεν θυμάται την ακριβή ημερομηνία γέννησής της! Αν υποθέσουμε ότι η Βασιλική γεννήθηκε στις $\alpha/\beta/2014$ (όπου το α δηλώνει την ημέρα και το β τον μήνα της ημερομηνίας) και $\alpha\cdot\beta = 153$, τότε:

α. Να βρείτε πότε έχει γενέθλια η Βασιλική.

β. Να βρείτε την ακριβή ηλικία της Βασιλικής τη σημερινή ημερομηνία που παίρνετε μέρος στον μαθηματικό διαγωνισμό.

γ. Να βρείτε την ακριβή ηλικία της Βασιλικής σε 1372 ημέρες από σήμερα.

(Να θεωρήσετε ότι κάθε έτος έχει 365 ημέρες και κάθε μήνας έχει 30 ημέρες).

ΛΥΣΗ

α. Αναλύουμε τον αριθμό 153 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $153 = 3^2\cdot 17$.

Άρα, η Βασιλική έχει γενέθλια στις $17/9/2014$.

β. Κάνουμε την αφαίρεση $20/1/2018 - 17/9/2014$:

$$\begin{array}{r} 20/1/2018 \\ \underline{-17/9/2014} \\ 3 \text{ ημέρες}/4 \text{ μήνες}/3\,\text{έτη} \end{array}$$

Επομένως, σήμερα η Βασιλική είναι 3 ετών, 4 μηνών και 3 ημερών.

γ. Είναι:

$$1372 = 3\cdot 365 + 277$$
$$277 = 9\cdot 30 + 7$$

Άρα σε 1372 ημέρες από σήμερα θα έχουν περάσει 3 έτη, 9 μήνες και 7 ημέρες και η ηλικία της Βασιλικής τότε θα είναι: $3 \text{ ημέρες}/4 \text{ μήνες}/3\,\text{έτη} + 7 \text{ ημέρες}/9 \text{ μήνες}/3\,\text{έτη}$, δηλαδή:

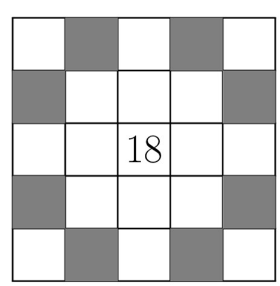
$$\begin{array}{l} 3 \text{ ημέρες}/4 \text{ μήνες}/3\,\text{έτη} \\ \underline{7 \text{ ημέρες}/9 \text{ μήνες}/3\,\text{έτη}} + \\ 10 \text{ ημέρες}/13 \text{ μήνες}/6 \text{ έτη} \\ \text{ή} \\ 10 \text{ ημέρες}/1 \text{ μήνας}/7 \text{ έτη} \end{array}$$

Άρα σε 1372 ημέρες από σήμερα η Βασιλική θα είναι: 7 ετών, 1 μήνα και 10 ημερών.

(*Μοριοδότηση*: 2 μονάδες για το ερώτημα **α.** , 1 μονάδα για το **β.** και 2 μονάδες για το **γ.**).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Στο διπλανό ***μαγικό τετράγωνο***, οι αριθμοί $1, 2, \ldots, 25$ τοποθετούνται στα μικρά τετραγωνάκια με τέτοιον τρόπο, ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο του τετραγώνου να είναι το ίδιο. Αν ο αριθμός 18 τοποθετηθεί στο κεντρικό τετραγωνάκι, να βρείτε το άθροισμα των αριθμών στα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα.



ΛΥΣΗ

Το άθροισμα όλων των αριθμών που τοποθετούνται στο μαγικό τετράγωνο είναι ίσο με

$$1+2+3+\cdots+25=325.$$

Άρα, το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή, κάθε στήλη και σε καθεμιά από τις δύο διαγωνίους είναι ίσο με $325:5=65$.

Αν προσθέσουμε τους αριθμούς που τοποθετούνται στη μεσαία γραμμή, στη μεσαία στήλη και στις δύο διαγωνίους, τότε έχουμε προσθέσει όλους τους αριθμούς που ***δεν*** είναι σε γραμμοσκιασμένο τετράγωνο – αλλά ο αριθμός στο κεντρικό τετράγωνο έχει προστεθεί 4 φορές (αντί για 1 φορά). Άρα, το άθροισμα των αριθμών που ***δεν*** είναι σε γραμμοσκιασμένο τετράγωνο είναι ίσο με $4\cdot 65-3\cdot 18=206$. Συνεπώς, το άθροισμα των αριθμών στα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα είναι ίσο με $325-206=\boxed{119}$.

(*Μοριοδότηση*: 1,5 μονάδα αν βρει ότι το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή, κάθε στήλη και σε καθεμιά από τις δύο διαγωνίους είναι ίσο με 65 και 3,5 μονάδες – κατ΄εκτίμηση – για τα υπόλοιπα).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ - ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑΣ
4ος ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
«Θ. Α. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2019

<u>ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ</u>

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνονται οι αριθμοί

$$\mathrm{A}=2^2\cdot\left[\left(3^2-7\right)+\left(3\cdot2^3-10^2:5\right)\right]-\left(6^2:18\right)\cdot11$$

και

$$\mathrm{B}=\left(7^2-2^2\cdot12\right)^{2019}+\left(2\cdot3^3-153:3\right)\cdot\left(4^3-2\cdot5^2\right)-4\cdot\left(2\cdot13-4^2\right).$$

α. Να βρείτε τους αριθμούς A και B.

β. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\Gamma=\dfrac{\left(2\cdot\mathrm{A}\right)^3\cdot\mathrm{B}^2}{\left(\mathrm{A}+1\right)^3\cdot\left(\mathrm{B}+1\right)}$ σε ισοδύναμο ανάγωγο κλάσμα.

ΛΥΣΗ

α. Είναι:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=2^2\cdot\left[\left(3^2-7\right)+\left(3\cdot2^3-10^2:5\right)\right]-\left(6^2:18\right)\cdot11=\\&=4\cdot\left[\left(9-7\right)+\left(3\cdot8-100:5\right)\right]-\left(36:18\right)\cdot11=\\&=4\cdot\left[2+\left(24-20\right)\right]-2\cdot11=4\cdot\left(2+4\right)-2\cdot11=\\&=4\cdot6-2\cdot11=24-22=\boxed{2}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\mathrm{B}&=\left(7^2-2^2\cdot12\right)^{2019}+\left(2\cdot3^3-153:3\right)\cdot\left(4^3-2\cdot5^2\right)-4\cdot\left(2\cdot13-4^2\right)=\\&=\left(49-4\cdot12\right)^{2019}+\left(2\cdot27-153:3\right)\cdot\left(64-2\cdot25\right)-4\cdot\left(2\cdot13-16\right)=\\&=\left(49-48\right)^{2019}+\left(54-51\right)\cdot\left(64-50\right)-4\cdot\left(26-16\right)=\\&=1^{2019}+3\cdot14-4\cdot10=1+42-40=43-40=\boxed{3}.\end{aligned}$$

β. Είναι:

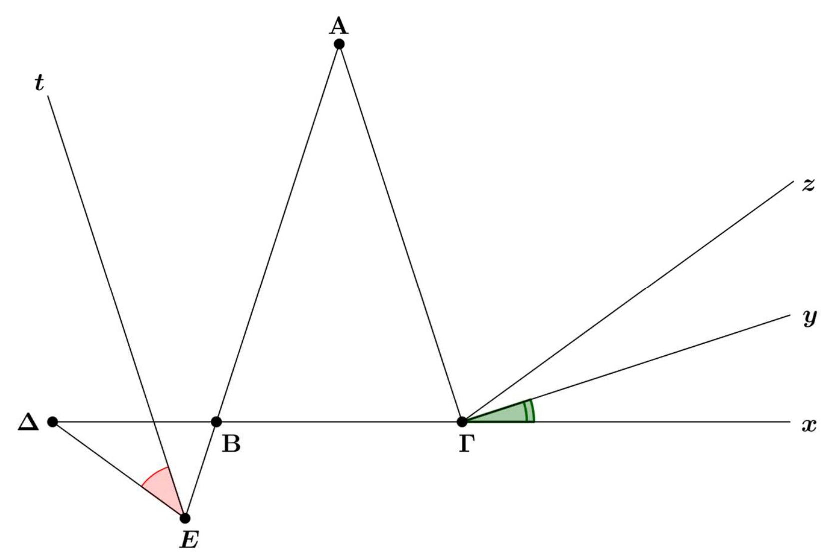
$$\Gamma=\frac{\left(2\cdot\mathrm{A}\right)^3\cdot\mathrm{B}^2}{\left(\mathrm{A}+1\right)^3\cdot\left(\mathrm{B}+1\right)}=\frac{\left(2\cdot2\right)^3\cdot3^2}{\left(2+1\right)^3\cdot\left(3+1\right)}=$$

$$=\frac{4^3\cdot3^2}{3^3\cdot4}=\frac{64\cdot9}{27\cdot4}=\boxed{\frac{16}{3}}$$, που είναι ανάγωγο κλάσμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν τα εξής:

- Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με βάση $\mathrm{B\Gamma}$.
- Το τρίγωνο $\Delta\mathrm{BE}$ είναι ισοσκελές με βάση BE.
- Η ημιευθεία Γy είναι διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{\Gamma}z$.
- Η ημιευθεία $\mathrm{E}t$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Delta$.
- Η γωνία $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}y$ είναι ορθή.
- Η γωνία $t\widehat{\mathrm{E}}\Delta$ είναι ίση με τα $\dfrac{2}{5}$ της ορθής γωνίας.



α. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $x\hat{\Gamma}y$ σε μοίρες.

β. Να εξηγήσετε γιατί η ημιευθεία $\Gamma\mathrm{A}$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}z$.

ΛΥΣΗ

α. Το $\frac{1}{5}$ της ορθής γωνίας είναι ίσο με $90^\circ : 5 = 18^\circ$. Άρα, η γωνία $t\hat{\mathrm{E}}\Delta$ είναι ίση με $2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$.

Επειδή η ημιευθεία $\mathrm{E}t$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta$, θα είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta = 2 \cdot t\hat{\mathrm{E}}\Delta = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$.

Το τρίγωνο $\Delta\mathrm{BE}$ είναι ισοσκελές με βάση BE, άρα $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta = 72^\circ$.

Επίσης, είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ (ως κατακορυφήν), οπότε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 72^\circ$.

Το τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $\mathrm{B}\Gamma$, άρα $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 72^\circ$.

Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}x$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$, οπότε θα είναι:

$$\mathrm{A}\hat{\Gamma}x = 180^\circ - \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ.$$

Τέλος, αφού $\mathrm{A}\hat{\Gamma}y = 90^\circ$, θα είναι:

$$x\hat{\Gamma}y = \mathrm{A}\hat{\Gamma}x - \mathrm{A}\hat{\Gamma}y = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ,$$

δηλαδή $\boxed{x\hat{\Gamma}y = 18^\circ}$.

β. Επειδή η ημιευθεία Γy είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{\Gamma}z$, θα είναι $y\hat{\Gamma}z = x\hat{\Gamma}y = 18^\circ$.

Συνεπώς, θα είναι:

$$\mathrm{A}\hat{\Gamma}z = \mathrm{A}\hat{\Gamma}y - y\hat{\Gamma}z = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ,$$

οπότε $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}z = 72^\circ$,

που σημαίνει ότι η ημιευθεία $\Gamma\mathrm{A}$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}z$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Η Ειρήνη ετοίμασε μια έκπληξη για τους φίλους της στα γενέθλιά της. Έβαλε σε ένα κουτί ένα δώρο και το κλείδωσε με ένα λουκέτο που είχε έναν τετραψήφιο κωδικό αριθμό. Για να βρουν οι φίλοι της τον κωδικό, τους έδωσε τις παρακάτω πληροφορίες:

« • *Ο αριθμός που ψάχνεις έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά.*
- *Το ψηφίο των δεκάδων του είναι ίσο με το τετράγωνο του ψηφίου των χιλιάδων του.*
- *Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι πρώτος αριθμός.*
- *Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού που ψάχνεις είναι ίσο με 27».*

Μπορείτε να βοηθήσετε τους φίλους της Ειρήνης να βρουν τον κωδικό και να ανοίξουν το λουκέτο;

ΛΥΣΗ

Το ψηφίο των χιλιάδων, αν υψωθεί στο τετράγωνο, θα είναι ίσο με το ψηφίο των δεκάδων, δηλαδή με αριθμό μικρότερο ή ίσο του 9. Άρα, το ψηφίο των χιλιάδων μπορεί να είναι ίσο με 1, 2, ή 3. Εξετάζουμε καθεμιά από τις τρεις αυτές περιπτώσεις ξεχωριστά.

- Αν το ψηφίο των χιλιάδων είναι ίσο με 1, τότε και το ψηφίο των δεκάδων θα είναι ίσο με 1. Αυτό, όμως, είναι *αδύνατο*, αφού ο αριθμός που ψάχνουμε έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά.
- Αν το ψηφίο των χιλιάδων είναι ίσο με 2, τότε το ψηφίο των δεκάδων θα είναι ίσο με $2^2 = 4$. Το άθροισμα των δύο αυτών ψηφίων είναι ίσο με $2 + 4 = 6$. Άρα, αφού το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού που ψάχνουμε είναι ίσο με 27, τα άλλα δύο ψηφία του (μονάδων και εκατοντάδων) θα πρέπει να έχουν άθροισμα ίσο με $27 - 6 = 21$. Αυτό, όμως, είναι *αδύνατο*, αφού καθένα από αυτά τα ψηφία είναι αριθμός μικρότερος ή ίσος του 9, οπότε το άθροισμά τους είναι μικρότερο ή ίσο του 18.
- Αν το ψηφίο των χιλιάδων είναι ίσο με 3, τότε το ψηφίο των δεκάδων θα είναι ίσο με $3^2 = 9$. Το άθροισμα των δύο αυτών ψηφίων είναι ίσο με $3 + 9 = 12$, οπότε τα άλλα δύο ψηφία του (μονάδων και εκατοντάδων) θα πρέπει να έχουν άθροισμα ίσο με $27 - 12 = 15$. Το ψηφίο των εκατοντάδων είναι πρώτος αριθμός μικρότερος ή ίσος του 9, άρα μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 2, 3, 5 ή 7. Αν ήταν 2, 3 ή 5, τότε το ψηφίο των μονάδων θα ήταν 13, 12 ή 10 αντίστοιχα, πράγμα αδύνατο. Επομένως, το ψηφίο των εκατοντάδων είναι ίσο με 7, οπότε το ψηφίο των μονάδων είναι ίσο με $15 - 7 = 8$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο ζητούμενος κωδικός είναι ο αριθμός $\boxed{3798}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Οι προεδρικές εκλογές στις Η.Π.Α. διεξάγονται κάθε 4 χρόνια, την πρώτη Τρίτη μετά την 1η Νοεμβρίου. Ποια θα είναι η ημερομηνία των εκλογών που θα διεξαχθούν το 2028;

ΛΥΣΗ

Επειδή $365 = 7 \cdot 52 + 1$, κάθε φορά που πάμε μπροστά κατά ένα (όχι δίσεκτο) έτος, η ημέρα της εβδομάδας που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία πηγαίνει και αυτή μια ημέρα μπροστά. Για παράδειγμα, σήμερα είναι Σάββατο, 19 Ιανουαρίου 2019, άρα η 19 Ιανουαρίου 2020 θα είναι Κυριακή. Αν λάβουμε υπόψη ότι τα έτη 2020 και 2024 είναι δίσεκτα, η 19 Ιανουαρίου 2028 θα έχει πάει μπροστά κατά $9 + 2 = 11$ ημέρες, άρα θα είναι Τετάρτη. Έτσι, η 26 Ιανουαρίου 2028 θα είναι Τετάρτη, άρα η 1 Φεβρουαρίου 2028 θα είναι Τρίτη. Επειδή το 2028 είναι δίσεκτο, η 29 Φεβρουαρίου 2028 θα είναι Τρίτη, άρα η 1 Μαρτίου 2028 θα είναι Τετάρτη. Προχωρώντας με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι η 1 Απριλίου 2028 θα είναι Σάββατο, η 1 Μαΐου 2028 θα είναι Δευτέρα, η 1 Ιουνίου 2028 θα είναι Πέμπτη, η 1 Ιουλίου 2028 θα είναι Σάββατο, η 1 Αυγούστου 2028 θα είναι Τρίτη, η 1 Σεπτεμβρίου 2028 θα είναι Παρασκευή, η 1 Οκτωβρίου 2028 θα είναι Κυριακή και η 1 Νοεμβρίου 2028 θα είναι Τετάρτη. Άρα, οι προεδρικές εκλογές στις Η.Π.Α. θα διεξαχθούν την ***Τρίτη 7 Νοεμβρίου 2028***.