ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑΣ
5[ος] ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
«Θ. Α. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2020

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\frac{5}{4}+\frac{7}{6}-1, \qquad \mathrm{B}=2+\frac{2-\frac{3}{2}}{2\cdot\frac{3}{5}}, \qquad \Gamma=4+2020\cdot\frac{1}{2020}-\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων A, B και Γ.
β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B και Γ.
γ. Να βρείτε τους αντιστρόφους τους.

ΛΥΣΗ

α. Είναι:

$$\mathrm{A}=\frac{5}{4}+\frac{7}{6}-1=\frac{15+14-12}{12}=\frac{17}{12}, \qquad \mathrm{B}=2+\frac{2-\frac{3}{2}}{2\cdot\frac{3}{5}}=2+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{6}{5}}=2+\frac{5}{12}=\frac{29}{12},$$

$$\Gamma=4+2020\cdot\frac{1}{2020}-\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(1-\frac{1}{3}\right)=4+1-\frac{13}{6}:\frac{2}{3}=5-\frac{13}{6}\cdot\frac{3}{2}=5-\frac{13}{4}=\frac{7}{4}=\frac{21}{12}$$

β. Είναι $\frac{17}{12}<\frac{21}{12}<\frac{29}{12}$ και άρα ισχύει: Α<Γ<Β

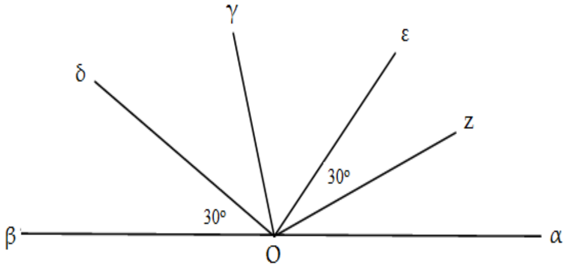
γ. Ο αντίστροφος του Α είναι $\frac{12}{17}$, ο αντίστροφος του Β είναι $\frac{12}{29}$ και ο αντίστροφος του Γ είναι $\frac{4}{7}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο επόμενο σχήμα, οι ημιευθείες Οα και Οβ είναι αντικείμενες, η ημιευθεία Οδ είναι διχοτόμος της $\beta\hat{O}\gamma$ και η ημιευθεία Οε είναι διχοτόμος της $\gamma\hat{O}\alpha$. Αν, επιπλέον, ισχύει ότι $\beta\hat{O}\delta=\varepsilon\hat{O}z=30^\circ$, τότε :

α. Να βρείτε τη γωνία $\gamma\hat{O}\varepsilon$ και να εξηγήσετε γιατί οι ημιευθείες Οδ και Οε είναι κάθετες.

β. Να αποδείξετε ότι η ημιευθεία Οz είναι διχοτόμος της $\varepsilon\hat{O}\alpha$.



ΛΥΣΗ

α. Αφού η Οδ είναι διχοτόμος της $\beta\hat{O}\gamma$ και $\beta\hat{O}\delta = 30^\circ$, τότε $\delta\hat{O}\gamma = 30^\circ$ και $\beta\hat{O}\gamma = 60^\circ$.

Άρα, $\alpha\hat{O}\gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Αφού η Οε είναι διχοτόμος της $\gamma\hat{O}\alpha$, τότε $\gamma\hat{O}\varepsilon = 60^\circ$ και $\alpha\hat{O}\varepsilon = 60^\circ$.

Επιπλέον, $\varepsilon\hat{O}\gamma + \gamma\hat{O}\delta = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, συνεπώς Οδ $\perp$ Οε.

β. Αφού $\alpha\hat{O}\gamma = 120^\circ$ και $\gamma\hat{O}z = \gamma\hat{O}\varepsilon + \varepsilon\hat{O}z = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, τότε $\alpha\hat{O}z = 30^\circ$, δηλαδή ισχύει ότι $\alpha\hat{O}z = z\hat{O}\varepsilon$ και επομένως η Οz είναι διχοτόμος της $\alpha\hat{O}\varepsilon$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Ο μπαμπάς της Βασιλικής θέλει να της κάνει ένα δώρο για τα γενέθλιά της. Όμως, επειδή είναι λίγο αφηρημένος, δεν θυμάται την ακριβή ημερομηνία γέννησής της!! Αν υποθέσουμε ότι η Βασιλική γεννήθηκε στις α / β / 2014 και $\alpha \cdot \beta = 153$, τότε:

α. Να βρείτε πότε έχει γενέθλια η Βασιλική.

β. Να βρείτε την ακριβή ηλικία της Βασιλικής την σημερινή ημερομηνία που παίρνετε μέρος στον μαθηματικό διαγωνισμό.

γ. Να βρείτε την ακριβή ηλικία της Βασιλικής σε 1372 ημέρες από σήμερα.

(Θεωρείστε ότι κάθε έτος έχει 365 ημέρες και κάθε μήνας έχει 30 ημέρες)

ΛΥΣΗ

α. Αναλύουμε τον αριθμό 153 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και έχουμε: $153 = 3^2 \cdot 17$

Άρα έχει γενέθλια την 17 / 9 /2014.

β. Κάνουμε την αφαίρεση (18 / 1 / 2020) – (17 / 9 / 2014).

Τότε θα ισχύει:

```
   18 / 1 / 2020
 - 17 / 9/ 2014
________________
   1ημ / 4μην / 5 ετών
```

Επομένως, η σημερινή της ηλικία είναι 5 ετών, 4 μηνών και 1 ημερών.

γ. Είναι:

$1372 = 3 \cdot 365 + 277$ και $277 = 9 \cdot 30 + 7$

Άρα, σε 1372 ημέρες από σήμερα θα έχουν περάσει 3 έτη, 9 μήνες και 7 ημέρες.

Επομένως, η ηλικία της θα είναι: (1ημ / 4 μην / 5 έτη)+(7ημ / 9μην / 3 έτη)

Δηλαδή:

```
   1ημ / 4 μην / 5 έτη
 + 7ημ / 9μην / 3 έτη
________________
   8ημ / 13μην / 8 ετών
         ή
   8ημ / 1μην / 9 ετών
```

Άρα, σε 1372 ημέρες από σήμερα θα είναι: 9 ετών, 1 μήνα και 8 ημερών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται ο φυσικός αριθμός $A = 2001 \cdot 2011 \cdot 2021 \cdot 2031$.

α. Να εξετάσετε αν ο φυσικός αριθμός Α είναι πρώτος ή σύνθετος.

β. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό x, ώστε ο αριθμός A+x να διαιρείται με το 5.

ΛΥΣΗ

α. Ο αριθμός Α είναι γινόμενο τεσσάρων παραγόντων, επομένως είναι σύνθετος αριθμός.

β. Το τελευταίο ψηφίο του αριθμού Α είναι το 1, διότι το τελευταίο ψηφίο οποιουδήποτε γινομένου είναι το γινόμενο των τελευταίων ψηφίων.

Γνωρίζουμε ότι ένας αριθμός διαιρείται με το 5, όταν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 5.

Επομένως, ο αριθμός x θα πρέπει να είναι ίσος με 4.