

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Μετάνια συσχετών που χαρακτηρίζουν καραυρίας αναγνωστικής αλληλοεξέργασης  
με εφεύρεση στη Διδικασία. Έτήπις αποφάσιων περιστάτερων του ενός από τα  
τηλετών απόφασης (αντινέτω).

Παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροιστήρα

• -II- σταθεροί -II-

Παίγνια τη παικτών ή 2

Παίγνια με σταθερούς αθροιστήρας

Παίγνιο: Η καραυρία που συν οποια δύο ή περισσότεροι αρθρολογικοί παίκτες  
με αντικρούσθεντος στάδιος επιδίχουν γρήγορα ενίργειας.

Παικτός: Μονάδα έτηπις απόφασης.  
Προσποθετικά να διεπιστρέψει τη δίκη του ευηγέρτειας εναντίον των αντιπάλων  
θεωρήσεων στης πληροφορίας που έχει.  
Είναι αρθρολογικός.

Ισρενηγήκη: Το σύννοιο των κοντών που ορίζουν της δυνοτής επιδοτήσεων οποιας  
δύναται να εκδοθετεί σε κάθε κίνηση του ο παικτός.

Αναζητούμενης της σφραγηγήκης που διεπιστρέψει τη σεχύο κάθε παικτή.

Αριχτή σφραγηγήκη: Κάθε παικτός επιδίχει μόνο μία από της δυνοτής σφραγηγήκης.

Μικρή σφραγηγήκη: Περιλαμβάνει συνδιαστική σφραγηγήκη οι οποιες επιδίχευσαν με κάποια  
πιθανότητα.

Παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροιστήρα

Δύο παικτές: ο παικτός των γραμμών A  
και ο παικτός των σειρών B

Ο παικτός A διαθέτει τη σφραγηγήκη

-II- B -II- n -II-

		B <sub>1</sub> B <sub>2</sub> ... B <sub>n</sub>			
		A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	⋮	A <sub>n</sub>
	A <sub>1</sub>	a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>		a <sub>1n</sub>
	A <sub>2</sub>				
	⋮				
	A <sub>n</sub>				a <sub>nn</sub>

ότου ο A ακολουθεί την A<sub>i</sub>  
και ο B ακολουθεί την B<sub>j</sub>  
όταν ο A κερδίζει a<sub>ij</sub>  
και ο B χάνει a<sub>ij</sub>

Άρχια κοινής γνώσης? Οι παικτές  
και οι δύο γνωρίζουν τη δύση  
του πινακα αυτού

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

-2-

Δύο πολιτικοί επιλέγουν το κύριο θήμα συζήσης των συζητήσεών τους ώστε να αποδειχθεί ότι οι δύο πολιτικοί έχουν την ίδια άποψη για την πολιτική συζήσης. Η συζήση απορθετικότητας (συζήση στη φήμη του A με ποσοτάτη στην αναδικώντα φήμη του B) στην οποία η πολιτική που μπορεί να επιλέγεται και δίνεται κοινωνίας στον πίνοκο πληρωμών του παικτή A.

		B				
		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>		
A	A <sub>1</sub>	-1	7	3	(όπου θερικό, κερδίζει ο A)	
	A <sub>2</sub>	1	1	2	(όπου αρνητικό, χόντι ο A)	
	A <sub>3</sub>	-5	-3	1	και κερδίζει ο B	

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

→ Η A<sub>3</sub> είναι υποβιώσιμης της A<sub>2</sub> στρατηγικής, και διερράγεται (σφύδισης) όποτε

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
A <sub>1</sub>	-1	7	3
A <sub>2</sub>	1	1	2

→ Η B<sub>3</sub> είναι υποβιώσιμης της B<sub>1</sub> (επιβάλλει ήδη θερικά)  
όποτε

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>
A <sub>1</sub>	-1	7
A <sub>2</sub>	1	1

→ Αυτές είναι οι τελικοί πίνοκοι πληρωμών του παικτή A.

	B <sub>1</sub>
A <sub>1</sub>	-1
A <sub>2</sub>	1

Πλέον, ο ποικιλός <sup>A</sup> έχει 2 επιλογές, ενώ ο B έχει 3.

Άρα, ο A οντικά έχει A<sub>2</sub> στρατηγική, θα είναι και η πιο διδύσκων, εφού ο B έχει μόνο 3 επιλογές στην B<sub>1</sub>.

**KPITHPIO minmax-minmin**

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	min
A <sub>1</sub>	-1	7	3	-1
A <sub>2</sub>	1	1	2	1
A <sub>3</sub>	-5	-3	1	-5
max	1	7	3	
	minimax			

- 21 -

Μεγαλύτερο σύνη σχήμα  
Μικρότερο σύνη γράφημα

Infia iapponeias

$\boxed{1=1} \rightsquigarrow$  Ουρθός είναι το ποιγνίο  
 $V=1$

→ Αν ζωτίζεται ως maximin ή ως minimax, τότε ηώντες απόκτην σφραγίδικη σε παιχνίδι. (Αλλως θα μπορούντε να βικτήσουν σφραγίδικη, δηλ. να αθεωρήσουν)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

A \ B	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	min	maxmin	-Αρχικό, δίχως να υπάρξει αβίγιας στρατηγική
A <sub>1</sub>	0	-2	2	-2	-2	
A <sub>2</sub>	5	4	-3	-3		
A <sub>3</sub>	2	3	-4	-4		
max	5	4	2	-2	(maxmin ≠ minmax οπόια δύναμη έχουμε αβίγια στρατηγική)	
minmax						

αβίγιας στρατηγική

μίκηση στρατηγική (τάχυσης και θρούλων στα διάφορα πιθανότητες)As zivai  $x_i$  η πιθανότητα για την οποία ο παίκτης A εκδηλώνει την A<sub>i</sub> στρατηγική. $y_j$ 

-||-

B

B<sub>j</sub>Το x<sub>i</sub> ιστορία  $\sum x_i = 1$  και  $\sum y_j = 1$ ΘΕΩΡΗΜΑ

Όσους ευφεμίσονται μίκηση στρατηγικής, ωστε για κάθε παίκτη υπέρχει πάντα η ίδια άριστη μίκηση στρατηγική που οδηγεί σε ασθενή Έλιτ (στρατηγική αντίστοιχη), από την οποία κανείς μπορεί να επιθυμεί να βιώσειν θύμη (δύναμη της θεραπείας προτιμών ή θέλειας του).

αναλυτικής  
μίκησης

$$V(A) = V(B) = V(\text{αβίγια πολυτινίου})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Διόπτρας 2x2

	Y	1-Y	min	maxmin
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>		
πιθανότητα				
x A <sub>1</sub>	-2	6	-2	
1-x A <sub>2</sub>	5	1	1	1
max	5	6	1	
minmax	5	6	1	1

οπόια δύναμη έχουμε αβίγια στρατηγική

As zivis  $x_i$  n mifovnza jis zwv onio o A akoluthi zw A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>.

-5-

Si zwv naikn A:

$$\begin{aligned} V(A, B_1) &= -2x + 5(1-x) = -2x + 5 - 5x = -7x + 5 \\ V(A, B_2) &= 6x + 1(1-x) = 6x + 1 - x = 5x + 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow V(A, B_1) = V(A, B_2) \\ \Rightarrow -7x + 5 = 5x + 1 \\ \Rightarrow 12x = 4 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow 1-x = \frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

Azai onhalvi ozi or keth 3 naixidia,  
tha apntsi na undizw jis qopis zw A<sub>1</sub> (3x)  
kai jis qopis zw A<sub>2</sub> (1-x).

Si na unpolozhaw zu qafkewhivo kipus zw A:

$$V = -7 \frac{1}{3} + 5 = \frac{-7}{3} + \frac{15}{3} = \frac{8}{3}$$

Qupis, tha kipus kai jis zwv naikn zwv zwgdiw, zw B

$$\begin{aligned} V(B, A_1) &= -2y + 6(1-y) = -2y + 6 - 6y = 6 - 8y \\ V(B, A_2) &= 5y + 1(1-y) = 5y + 1 - y = 1 + 4y \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow V(B, A_1) = V(B, A_2) \\ \Rightarrow 6 - 8y = 1 + 4y \\ \Rightarrow 5 = 12y \\ \Rightarrow y = \frac{5}{12} \rightarrow 1-y = \frac{7}{12} \end{array} \right\}$$

Azai onhalvi ozi or keth 12 naixidia,  
tha akoluthi 5 qopis zw B<sub>1</sub> kai  
7 qopis zw B<sub>2</sub>.

$$V = \frac{8}{3}$$

Trviko, Exoufle:

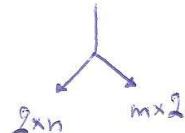
$$\begin{array}{ll} A \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) & \\ B \left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right) & \text{me} \quad V = \frac{8}{3} \end{array}$$

#### EPISIMIANI

H zifn zwv naixidou 8/3 onhalvi ozi or oj jis naixidai naibou zw neigmo-noddus qopis  
zo prosofotewhivo kipus zw A. Tha zw 8/3 ozn kai n prosofotewhivo qopis zw B.  
To anozidhia zw jis zw zifn zw naixidou zw oj jis zw zifn.

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

αριθμός στρατηγικής

μεταξύ στρατηγικής  $2 \times 2$ ΕΦΑΡΜΟΣΗ  $(2 \times n)$ 

πιθαν.	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	min	maxmin
$x_1, A_1$	1	4	-2	-3	5	-3	
$x_2, A_2$	4	3	5	2	-1	(-1)	-1
max	4	4	5	(2)	5		
minmax				2			

πινακάς  
 $2 \times 5$ minmax  $\neq$  maxmin

οπόια δύνη υπέρχει αριθμός στρατηγικής

Είναι ο παίκτης  $A$ Αναβλύσκειν ανάδομα του  $A$ :

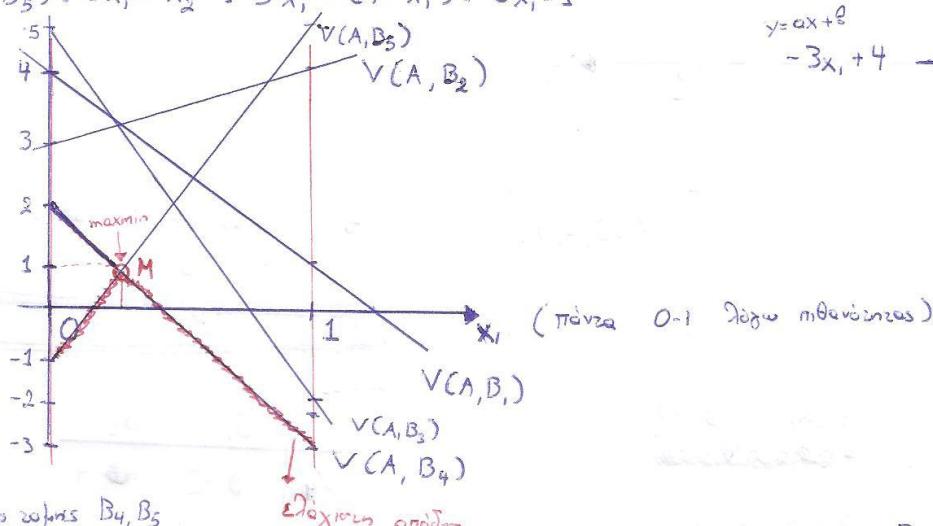
$$V(A, B_1) = 1x_1 + 4x_2 = 1x_1 + 4(1-x_1) = -3x_1 + 4$$

$$V(A, B_2) = 4x_1 + 3x_2 = 4x_1 + 3(1-x_1) = x_1 + 3$$

$$V(A, B_3) = -2x_1 + 5x_2 = -2x_1 + 5(1-x_1) = -7x_1 + 5$$

$$V(A, B_4) = -3x_1 + 2x_2 = -3x_1 + 2(1-x_1) = -5x_1 + 2$$

$$V(A, B_5) = 5x_1 - x_2 = 5x_1 - (1-x_1) = 6x_1 - 1$$

Μ αντίστοιχος  $B_4, B_5$ Κριτήριο του παίκτη  $A$  είναι να maxmin.Άρα, ο  $B$  παίκτης θα αποφύγει να παιχνίσει στη στρατηγική  $B_4, B_5$  που θα έχει την θερμότερη απώλεια.

	$B_4$	$B_5$
$A_1$	-3	5
$A_2$	2	-1

και η πινακάς  
είναι πινακάς  
 $2 \times 2$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ( $m \times 2$ )

-7-

	$y_1$	$y_2$		
	$B_1$	$B_2$	min	maxmin
$x_1$	$A_1$	-2	4	-2
$x_2$	$A_2$	5	-3	-3
$x_3$	$A_3$	4	2	2
$x_4$	$A_4$	2	1	1
	max	5	4	
	minmax		4	

maxmin ≠ minmax

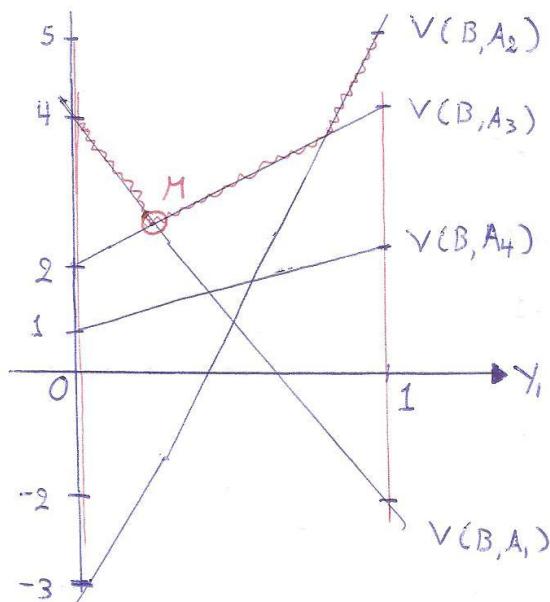
Αναβούμενη συνάρτηση των παικτών Β:

$$V(B, A_1) = -2y_1 + 4(1-y_1) = -6y_1 + 4$$

$$V(B, A_2) = 5y_1 - 3(1-y_1) = 8y_1 - 3$$

$$V(B, A_3) = 4y_1 + 2(1-y_1) = 2y_1 + 2$$

$$V(B, A_4) = 2y_1 + (1-y_1) = y_1 + 1$$



To M είναι σημείο της  
A<sub>2</sub> και A<sub>3</sub>

Ο B θα ακολουθήσει την επόμενη  
από τις μεγιστεύσασθεντικές απωλείες.

Όποιες:

	$B_1$	$B_2$
$A_1$	-2	4
$A_3$	4	2

και συνιζησθεί με  $2 \times 2$

Συναφής στρατηγική παικτών  $A(x_1, 0, x_3, 0)$

$B(y_1, y_2)$

Την απόδοση των παιχνιδιών V

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Παλύτιο σχεθίρος αθροισμού)

!!!

-8-

Δύο περιόδους εμπορίων A και B, επηρεάζουσα, τύπο αναφορικής σύνου cola, για οποια καλύπτουν το σύνολο της αγοράς για την αναφορική αυτού του σύνου.  
Για να αυξήσουν το περιόδο αγοράς τους, πρέκειται να κάνουν συγκεκριμένη πρωθ. επιλ. σε διαφορετικά περιόδους Δύο της χώρας, μεταναστεύοντας αξία στην ελεύθερης αγορά.  
Τρίτη απότικη πρωθ. ενεργειας για την κόθη εσείρεται. Η εκτίμησης αξίας (σε χιλιόδες ωρώ) των πωλήσων στην εσείρετα A για κάθη συνδυαστική απότικη πώλησης δίνεται στα πίνακα:

	B- $\Sigma_1$	B- $\Sigma_2$	B- $\Sigma_3$
A- $\Sigma_1$	190	270	270
A- $\Sigma_2$	330	200	220
A- $\Sigma_3$	310	230	280

Ερωτήσεις:

- Χωρίς να διερχόμενη της υπόJ. στρατηγικές, εφαρμόστε την κριτήριο minmax για να διεπιλύσετε την υπότικη ή όχι απότικη πώληση.
- Να εφαρμόσετε την καρδιναλική μέθοδο προκατίνευσης να προσδιορίσετε την άριστη στρατηγική για κάθη εσείρετα.

Λύση:

i)	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	min	maxmin
A <sub>1</sub>	190	270	270	190	
A <sub>2</sub>	330	200	220	200	
A <sub>3</sub>	310	230	280	230	280
max	330	270	280		280 ≠ 270
min max		270			Δεν υπάρχει απότικη λογοποίηση.

ii) Από την ίχοση απότικη λογοποίηση, τα τέλη υπάρχει αριθμός στρατηγικής,

ii) Από τη ίχοση μηκών

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
A <sub>1</sub>	190	270	270
A <sub>2</sub>	330	200	220
A <sub>3</sub>	310	230	280

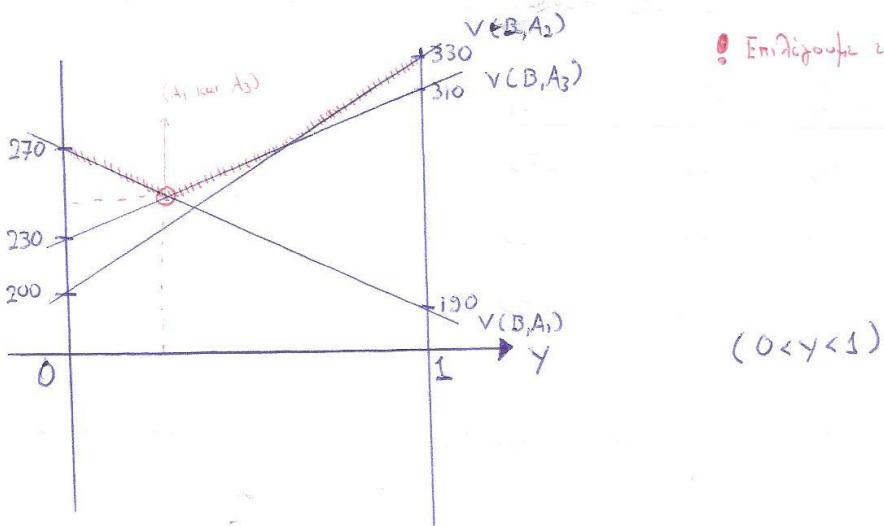
n B<sub>3</sub> υπόJ. της B<sub>2</sub> στρατηγικής,  
οπότε

3x2

→ το οποίο σημειώνεται, ότι την  
διαθέσια της γραφικής παράστασης  
Θα το κάνουμε 2x2

	$B_1$	$B_2$
$A_1$	190	270
$A_2$	330	200
$A_3$	310	230
$y$	$1-y$	

$$\begin{aligned} V(B, A_1) &= 190y + 270(1-y) = 270 - 80y \quad (0, 270) \quad (1, 190) \\ V(B, A_2) &= 330y + 200(1-y) = 200 + 130y \quad (0, 200) \quad (1, 330) \\ V(B, A_3) &= 310y + 230(1-y) = 230 + 80y \quad (0, 230) \quad (1, 310) \end{aligned}$$



Επιλογή για την κατάλληλη στρατηγική

$$(0 < y < 1)$$

Οποίως, ο πίνακας γίνεται:

	$B_1$	$B_2$
$A_1$	190	270
$A_3$	310	230

$$V(B, A_1) = V(B, A_3)$$

$$\Rightarrow 270 - 80y = 230 + 80y$$

$$\Rightarrow 160y = 40$$

$$\Rightarrow y = 1/4 \quad \text{και} \quad 1-y = 3/4$$

$$\text{Οπότε} \quad V = 270 - \frac{3}{4} \cdot 80 = 250$$

Συγχυτωμένη για τον  $B$ :  $B_1, B_2, B_3$   
Πιθανή σερβιτορική  $(1/4, 3/4, 0)$

Απόδοση ποικιλίας  $V = 250$  (αριστερά του πινάκου  $A$ )  
( $520 - 250 = 270$ )  
Από το πινάκα  $B$ , θα ξεχωρίσει το  $-270$  και θα είναι κυρτοποιημένος.

Πιθανή σερβιτορική για τον  $A$ :  $(1/2, 0, 1/2)$

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	min
A <sub>1</sub>	2	3	4	5	②
A <sub>2</sub>	1	1	-1	-2	-2
A <sub>3</sub>	4	1	3	3	1
A <sub>4</sub>	-3	1	0	1	-3
max	4	③	4	5	

Προσδιορίζεται την άριθμη σφραγίδα  
χιο κάθε πλευρά και την για την πολύγωνο.

Κριτήριο minimax

$$\text{maxmin} \rightarrow 2$$

$$\text{minmax} \rightarrow 3$$

Δεν υπάρχει ανθεκτικός λογισμός, 2#3

Άρα οι ίχωστες σημείοι λογοποιούνται, κατά την υπόρξη αριθμητικής σφραγίδας.

Άρα θα ίχωστε πειρατικής σφραγίδας.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
A <sub>1</sub>	2	3	4	< 5
A <sub>2</sub>	1	1	-1	-2
A <sub>3</sub>	4	1	3	3
A <sub>4</sub>	-3	1	0	1

- A<sub>2</sub>, A<sub>4</sub> διαχράφονται, γιατί είναι  
υποδειγμέτες της A<sub>1</sub>  
(Δεν θα εφαρμοστούν ποτέ από την A).

- B<sub>3</sub>, B<sub>4</sub> διαχράφονται, γιατί είναι  
υποδειγμέτες της B<sub>2</sub>  
(Δεν θα εφαρμοστούν ποτέ την B)

Τελικά, ο πίνακας μέτρωσής μετατρέπεται σεν ακόλουθο πινακά διάστασης 2x2.

πιθανότητα	y		1-y
	B <sub>1</sub>		B <sub>2</sub>
x	A <sub>5</sub>	2	3
1-x	A <sub>3</sub>	4	1

As είναι X<sub>i</sub> η πιθανότητα ότι την στοιχία o A ακολουθεί την A<sub>i</sub>  
B<sub>j</sub>  
Y<sub>j</sub>

Για την μετάνυστη A:

$$\begin{aligned} VCA, B_1 &= 2x + 4(1-x) = -2x + 4 \\ VCA, B_2 &= 3x + 1(1-x) = 2x + 1 \end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow VCA, B_1 = VCA, B_2 \Rightarrow -2x + 4 = 2x + 1 \right. \\ \Rightarrow x = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow 1-x = \frac{1}{4} \end{math>$$

$$V(A, B_1) = 2 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \quad \text{η} \quad \text{zifis zou polixios}$$

Για zou polixos B:

$$V(B, A_1) = 2y + 3(1-y) = -y + 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow V(B, A_1) = V(B, A_3) \\ \Rightarrow -y + 3 = 3y + 1 \end{array} \right.$$

$$V(B, A_3) = 4y + 1(1-y) = 3y + 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow -y + 3 = 3y + 1 \\ \Rightarrow 4y = 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow 1-y = \frac{1}{2}$$

$$V(B, A_3) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{η} \quad \text{zifis zou polixios}$$

Ανακυρθείσαντας, οι αποτίμωση στα zou λεγόμενες:

- Μεικτή σχρενγκική για zou polixos A:  $(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0)$
- Μεικτή σχρενγκική για zou polixos B:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$

$$\bullet \text{Τιμή zou polixios } V = 2.5 = \frac{5}{2}$$

(αντικατέστηκε για zou polixos A,)  
ζητήθη zou polixos B

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	min	maxmin
A <sub>1</sub>	3	1	2	1	1	1
A <sub>2</sub>	-1	2	-1	-2	-2	
A <sub>3</sub>	5	3	1	2	1	1
A <sub>4</sub>	-3	1	1	0	0	
max	5	3	2	2		
minmax			2	2		

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ Minimax

maxmin ≠ minmax

1 ≠ 2

οπότε δύο υπόχρι αντίστοιχα παραγόντα

Άφοι, δύο ίχωρης αντίστοιχα, ενδιαφέροντα, δύο υπόχρι αριθμούς συρραγήκαν.

Άρα, θα ίχωρη μηδική συρραγήκαν.

Συνεχίζουμε την διεργαφή υποδιαιώνιμων συρραγήκων

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
A <sub>1</sub>	3	1	2	1
A <sub>2</sub>	-1	2	-1	-2
A <sub>3</sub>	5	3	1	2
A <sub>4</sub>	-3	1	1	0

Τελικό, ο πινόκιος πληρωμής βιώνεται στον εκδόσθιο πίνοκο διάνυσμα 2x2,

πιθανότητα

	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
x A <sub>1</sub>	2	1
1-x A <sub>3</sub>	1	2

As είναι  $x_i$  η πιθανότητα για να σημειωθεί ο A<sub>i</sub> αναδοθεί οι A<sub>i</sub> και οι B<sub>j</sub>

Για τους παικτην Α:

$$\begin{aligned} V(A, B_3) &= 2x + 1(1-x) = x+1 \\ V(A, B_4) &= 1x + 2(1-x) = -x+2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow V(A, B_3) = V(A, B_4) \\ \Rightarrow x+1 = -x+2 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ και } 1-x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

- 13 -

Τιμή παιχνίου:

$$V(A, B_3) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.5 \quad \text{είναι το προσδοκώνυμο κύριος του } A.$$

Για τους παικτην Β

$$\begin{aligned} V(B, A_1) &= 2y + 1(1-y) = y+1 \\ V(B, A_3) &= 1y + 2(1-y) = -y+2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow V(B, A_1) = V(B, A_3) \\ \Rightarrow y+1 = -y+2 \\ \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ και } 1-y = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Τιμή παιχνίου:

$$V(B, A_1) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.5 \quad \text{επο μηδείς και το κύριος του } A, \\ \text{καὶ πως θα πρέπει να συγχωνεύεται η ίδια ποισμένη δύο παικτών βιβλιογραφίας.}$$

Ανακριθείσαντας, το γελικό αποτέλεσμα σίνα το εξής:

- Μετανιώνοντας ότι τα παικτην Α:  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$
- -11- -11- B:  $(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- Τιμή του παιχνίου  $V = 1.5$

ΑΙΓΚΗΣΗ 3 (Περιπτώσεων  $m \times 2$ )

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	min	maxmin
$A_1$	50	30	40	15	15	
$A_2$	40	50	60	20	20	20
$A_3$	20	60	50	40	20	20
max	50	60	60	40		
minmax		60	60			

ΠΑΙΓΝΙΟ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ 100%

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ minimax

maxmin ≠ minmax

20 ≠ 60

οπότε δύναται σημείο συμμορφίας,  
όπου δύναται απίγνωστη σφραγίδική.

Άρα, θα έχουμε τέτοια σφραγίδικη.

Ιντεριόρα με την διοχραφή υποθέσεων σφραγίδικών.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	50	30	40	15
$A_2$	40	50	60	20
$A_3$	20	60	50	40

Οι σφραγίδικές  $B_2, B_3$  είναι  
υποθέσεις για  $B_4$  και διοχράφονται.Τελικά, ο πίνακας πληρωθείν παίζεται σταυρού ακίνητο πίνακα διάστασης  $3 \times 2$   
(Περιπτώσεων  $m \times 2$ )

	$B_1$	$B_4$
$A_1$	50	15
$A_2$	40	20
$A_3$	20	40

Ανατρικότητα αναδομής των  $B$  ποικιλών:

$$V(B, A_1) = 50y + 15(1-y) = 35y + 15$$

$$V(B, A_2) = 40y + 20(1-y) = 20y + 20$$

$$V(B, A_3) = 20y + 40(1-y) = -20y + 40$$

Για  $y=0$ 

$$(0, 15)$$

$$(0, 20)$$

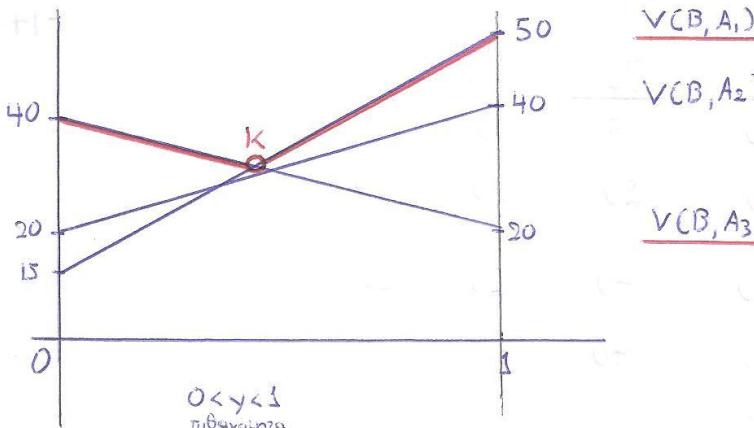
$$(0, 40)$$

Για  $y=1$ 

$$(1, 50)$$

$$(1, 40)$$

$$(1, 20)$$



-15-26

Επιδή ο παίκτης B επιλέγει minimax στρατηγική, αυτό ανθεκτικό δεν επιλέγεται το διάχυτο από τη βίαιοτη.

Η στρατηγική  $A_2$  από την πίληρα του παίκτη A ανταπίζεται αρχικά την στρατηγική στου καθηριαρικού του minimax σημείου K.

Άρα, ο πίνακας για τη διδασκαλία  $2 \times 2$

		$B_1$	$B_4$
		50	15
$A_1$	x	50	15
$A_3$	$1-x$	20	40

Ας είναι  $x$  η πιθανότητα για την ονοματεία A να ακολουθεί την  $A_1$   
 $y$  η πιθανότητα για την ονοματεία B να ακολουθεί την  $B_1$

Για την παίκτη A:

$$\begin{aligned} V(A, B_1) &= 50x + 20(1-x) = 30x + 20 \\ V(A, B_4) &= 15x + 40(1-x) = -25x + 40 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow V(A, B_1) = V(A, B_4) \\ \Rightarrow 30x + 20 = -25x + 40 \\ \Rightarrow 55x = 20 \\ \Rightarrow x = \frac{4}{11} \rightarrow 1-x = \frac{7}{11} \end{array} \right.$$

$$V = 50 \cdot \frac{4}{11} + 20 \cdot \frac{7}{11} = \frac{340}{11}$$

Για την παίκτη B:

$$\begin{aligned} V(B, A_1) &= 50y + 15(1-y) = 35y + 15 \\ V(B, A_3) &= 20y + 40(1-y) = -20y + 40 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow V(B, A_1) = V(B, A_3) \\ \Rightarrow 35y + 15 = -20y + 40 \\ \Rightarrow y = \frac{5}{11} \rightarrow 1-y = \frac{6}{11} \end{array} \right.$$

$$V = 50 \cdot \frac{5}{11} + 15 \cdot \frac{6}{11} = \frac{250}{11} + \frac{90}{11} = \frac{340}{11}$$

Τελικά,  
• Η πιθανότητα παίκτη A:  $(\frac{4}{11}, 0, \frac{7}{11}, 0)$   
• Η πιθανότητα παίκτη B:  $(\frac{5}{11}, 0, 0, \frac{6}{11})$

Τηλική ποικιλία:  $V = \frac{340}{11} = 30.91\%$   
 $A = 30.91\%$   $B = 69.08\%$   
 ως έπεισμα

## ΑΣΚΗΣΗ 4 !!!

-16-

Κίρδος / Ινφιλία για την Α για «Κυριολή»			
	B <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>
A <sub>0</sub>	0	-1	2
A <sub>1</sub>	1	0	-1
A <sub>2</sub>	1	1	2

Κίρδος / Ινφιλία για την Α για «Γράφημα»			
	B <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>
A <sub>0</sub>	2	-1	0
A <sub>1</sub>	-1	1	-1
A <sub>2</sub>	1	-1	-1

Η πθενότητα επιφάνειας για κάθε ενας παικτης  $p = 0.5$  (Κυριολή - Γράφημα)

Ανατρέψτε την Κίρδος / Ινφιλία για την παικτην Α

	B <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	min	maxmin
A <sub>0</sub>	1	-1	1	-1	
A <sub>1</sub>	0	0,5	-1	-1	
A <sub>2</sub>	1	0	0,5	0	0
max	1	0,5	1		
minmax			0,5		

π.χ. (A<sub>0</sub>, B<sub>0</sub>)

$$0 \times (0,5) + 2 \times (0,5) = 1$$

Εγκριτική κρίσης minmax

maxmin ≠ minmax

$$0 \neq 0,5$$

Οπότε δύο υπόρχουν αντίτοιχα λιαρρόποτα, όπως δύο υπόρχουν αφήγηση στρατηγική.  
Άρα, θα έχουμε δύο κανονικές στρατηγικές.

Συνεχίζουμε τις τις διαχρονικές υποδιεύσειρων στρατηγικών:

	B <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>
A <sub>0</sub>	1	-1	1
A <sub>1</sub>	0	0,5	-1
A <sub>2</sub>	1	0	0,5

Τελικά, ο πίνακας πληρωμών μετατρέπεται σαν ακόλουθο πίνακα διάστασης 3x2 ( $\frac{\text{πλήρωμα}}{\text{πληρωμή}}$ )

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>
A <sub>0</sub>	-1	1
A <sub>1</sub>	0,5	-1
A <sub>2</sub>	0	0,5

Αναφορικές απόδοσης για παικτή B:

$$V(B, A_0) = -1y + 1(1-y) = -2y + 1$$

$$V(B, A_1) = 0,5y + (-1)(1-y) = 1,5y - 1$$

$$V(B, A_2) = 0y + 0,5(1-y) = -0,5y + 0,5$$

$$y=0$$

$$(0, 1)$$

$$(0, -1)$$

$$(0, 0, 5)$$

$$(0, 0, 5)$$

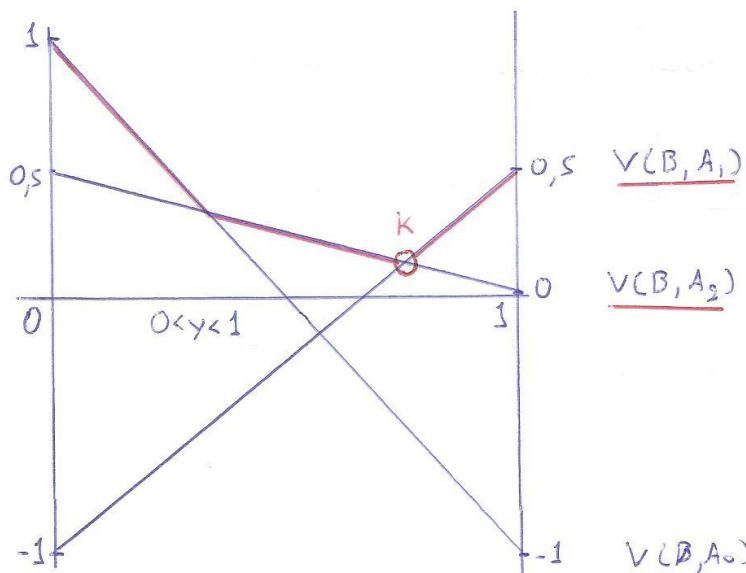
$$y=1$$

$$(1, -1)$$

$$(1, 0, 5)$$

$$(1, 0)$$

-17-



Επιβλή, ο παικτής B επιλέγει minimax στρατηγική, ουτό αποτελεί ότι θα επιλέξει τα ελάχιστα από τα βέτοα.

$$V(B, A_0)$$

$A_0$  στρατηγικής του  $A$  απορρίπτεται, ορθώς δεν απήκειται σαν καθοριστικό του minimax απέναντι  $K$ .

Παλιό, ο πίνακας πληρωμών έχει διατάξεις  $2 \times 2$ :

	$B_1$	$B_2$
$A_1$	0,5	-1
$A_2$	0	0,5

Αφούς οι φαρμάκους την γνωστή διαδικασία για ποίηση με πίνακα  $2 \times 2$ , ισχουν τα εξής:

- Μεγαλύτερη απόδοση του παικτή A:  $(0, 0, 25, 0, 75)$

- Μεγαλύτερη απόδοση του παικτή B:  $(0, 0, 75, 0, 25)$

- Τίμη των παιχνίδων  $V = 0,125$  €

- O παίκτης A «νοθεύει» το παιχνίδι απόδοσες το νόμιμηa με κάλπικo που δεν ~18.  
 «κερδώνει» και στις δύο άψεις. Ενούτι το νοθευτικό παιχνίδι του παίκτη A;

Πρίντι και ηθι το παιχνίδι με πίνακα κίρδων / βιντεος του παίκτη A του πίνακα 1.

	B <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	min	maxmin
A <sub>0</sub>	0	-1	2	-1	
A <sub>1</sub>	1	0	-1	-1	
A <sub>2</sub>	1	1	2	1	1
max minmax	1 1	1 1	2 2		

Διαγράφουμε τις υποτιτιτερες στρατηγικές:

	B <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	
A <sub>0</sub>	0	-1	2	
A <sub>1</sub>	1	0	-1	B <sub>0</sub> υποτιτιτερη της B <sub>1</sub>
A <sub>2</sub>	1	1	2	

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	
A <sub>0</sub>	-1	2	
A <sub>1</sub>	0	-1	A <sub>2</sub> κυριοπλιτι της στρατηγικής A <sub>0</sub> και A <sub>1</sub>
A <sub>2</sub>	1	2	

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	
A <sub>2</sub>	1	2	B <sub>2</sub> υποτιτιτερη της B <sub>1</sub>

	B <sub>1</sub>	
A <sub>2</sub>	1	

Οποιες απότια τιμοποιίες το (A<sub>2</sub>, B<sub>1</sub>)  
 V=1 € κίρδος για την παίκτη A

Άρα, το νοθευτικό παιχνίδι ενούτι το παίκτη A.

# ΑΣΚΗΣΗ 5

(Πρόβλημα 2 km)

$A \rightarrow 30\%$

$B \rightarrow 70\%$

## Επιλογή B

-19-

Επιλογή A

	Προσφορά B <sub>1</sub>	Προσφορά B <sub>2</sub>	Προσφορά B <sub>3</sub>
Επιλογή A	Προσφορά A <sub>1</sub>	Ισοπεδία (50%-50%) κερδίζει ή B	κερδίζει ή A
	Προσφορά A <sub>2</sub>	αντιστροφή προσφορών	κερδίζει ή A
	Προσφορά A <sub>3</sub>	Ισοπεδία	κερδίζει ή B

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	min	maxmin
A <sub>1</sub>	20	-30	70	-30	-30
A <sub>2</sub>	40	70	-30	-30	-30
A <sub>3</sub>	20	-30	-30	-30	-30
max	40	70	70		
minmax	40				

Ισοπεδία  $\rightarrow 50\% - 50\%$ , ή A ή 30%  $\nearrow$  20%

Αντιστροφή προσφορών  $\rightarrow A \rightarrow 70\%$ , ή A  $\nearrow$  40%  
 $B \rightarrow 30\%$ .

Κερδίζει ή B  $\rightarrow B \rightarrow 100\%$ , δρά A  $\nearrow$  30%

Κερδίζει ή A  $\rightarrow A \rightarrow 100\%$ , δρά A  $\nearrow$  70%

A<sub>3</sub> εφερθείσαντας το κρίσιμο minimax:

maxmin  $\neq$  minmax

-30  $\neq$  40

Οπότε δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας,

ώστε δεν υπάρχει αριθμός συρρογήσεων.

Άρα, θα έχουμε δύο κίνηση συρρογήσεων.

Συντομογραφή των διαχρονικών υποβάσισερων συρρογήσεων:

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
A <sub>1</sub>	20	-30	70
A <sub>2</sub>	40	70	-30
A <sub>3</sub>	20	-30	-30

A<sub>3</sub> υποδέχεται την A<sub>1</sub>

O πίνακας πληρωμών μεταναστών συντομεύεται σε διάδρομο πίνακα Σιδοράνου  $2 \times 3$ . (Περπάνω  $2 \times m$ )

πίνακας	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$x$	20	-30	70
$1-x$	40	70	-30

-20-

As είναι  $x_i$  η μθαύρισμα βιτ ων απόλα ο A ακολουθεί την  $A_i$ ;  $B_j$

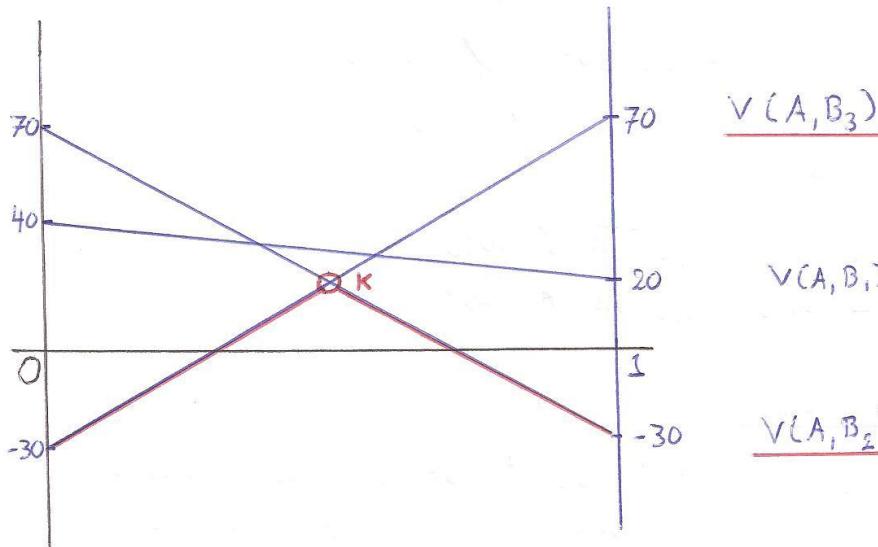
Για ταν μακρινά A:

$$V(A, B_1) = 20x + 40(1-x) = -20x + 40$$

$$V(A, B_2) = -30x + 70(1-x) = -100x + 70$$

$$V(A, B_3) = 70x - 30(1-x) = 100x - 30$$

$$\begin{array}{ll} x=0 & x=1 \\ (0, 40) & (1, 20) \\ (0, 70) & (1, -30) \\ (0, -30) & (1, 70) \end{array}$$



Η σφραγιδική  $B_i$  απορρίπτεται αρχής ίση συμβιβάση στην καθοριστική του maximin απόσταση K.

Επομένη ο πίνακας A επιδίγει maximin σφραγιδική, ουτε αντικαθίσταται άντιθέτω πίγισμα από τη σφραγίδα.

Παρότο, ο πίνακας πληρωμών γίνεται διάδρομος  $2 \times 2$ .

πίνακας	$y_2$	$y_3$
$x$	$B_2$	$B_3$
$x$	-30	70
$1-x$	70	-30

$$\begin{aligned} V(A, B_2) &= -100x + 70 \\ V(A, B_3) &= 100x - 30 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow V(A, B_2) = V(A, B_3) \\ \Rightarrow -100x + 70 = 100x - 30 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow 1-x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$V = 100 \cdot \frac{1}{2} - 30 = 20$$

Για τον ποικιλό B έχουμε:

$$\begin{aligned} V(CB, A_1) &= -30y_2 + 70y_3 \\ V(CB, A_2) &= 70y_2 + (-30)y_3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow V(B, A_1) = V(B, A_2) \\ \Rightarrow -30y_2 + 70y_3 = 70y_2 - 30y_3 \\ \Rightarrow 100y_3 = 100y_2 \\ \Rightarrow y_3 = y_2 \end{array} \right.$$

πιθανότητα  
 $y_3 + y_2 = 1 \rightarrow y_2 = y_3 = \frac{1}{2}$

$$V = -30 \cdot \frac{1}{2} + 70 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

Συνοψίσουντας τα γενικά αποτελέσματα:

- Μεικτή στρατηγική για τον ποικιλό A:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
- -11-
- Τύπος του ποιχυλίου  $V=20$   
 (Το αποτέλεσμα που δίνει η ειρηνική ποιχυλία είναι η μισή της)

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	min	maxmin
A <sub>1</sub>	0	-2	2	-2	(-2)
A <sub>2</sub>	3	4	-3	-3	
A <sub>3</sub>	2	3	-4	-4	
max	3	4	2		
minmax		(2)			-2 ≠ 2

Πρόκειται για παιχνίδι παικτών βιντεοπαιχνίδων αθροιστήρας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ maxmin - minmax (χωρίς διαχρονική υποδέσμευση στρατηγικών)

$$\text{minmax} \rightarrow 2$$

$$\text{maxmin} \neq \text{minmax}$$

$$\text{maxmin} \rightarrow -2$$

Δεν υπάρχει κοινό σημείο ταυτόποιας.

Άρα δύο υπάρχουν αλιγάτος στρατηγικές που θα μπορούν να ταυτοποιηθούν στο δύο παιχνίδια.  
Επομένως, έχουμε βιντεοπαιχνίδια στρατηγικής.

Ιντεριζόμενα βιντεοπαιχνίδια στρατηγικών

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
A <sub>1</sub>	0	-2	2
A <sub>2</sub>	3	4	-3
A <sub>3</sub>	2	3	-4

Η στρατηγική A<sub>3</sub> διαχρέψεται ως υποδέσμευτη στην A<sub>2</sub>, όπου οι πίνακες πληρωμών βιντεοπαιχνίδια σε διαδικτυακό πλαίσιο διάνυσσαν 2x3, έπειτα δύο υπάρχουν άλλις υποδέσμευτες στρατηγικές.

πιθανότητα	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>1</sub> + Y <sub>2</sub> + Y <sub>3</sub> = 1
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	
X	A <sub>1</sub>	0	-2	2
1-X	A <sub>2</sub>	3	4	-3

As ίντεις X<sub>i</sub> ή πιθανότητες βιντεοπαιχνίδια στην A<sub>i</sub>  
Y<sub>j</sub> βιντεοπαιχνίδια στην B<sub>j</sub>

Εφερθόςσης σε χραφικές βιβλιούσ επιλογές

-23-

Για τους παίκτες A έχουμε:

$$V(A, B_1) = 0x + 3(1-x) = 3 - 3x$$

$$V(A, B_2) = -2x + 4(1-x) = 4 - 6x$$

$$V(A, B_3) = 2x - 3(1-x) = -3 + 5x$$

$$x=0$$

$$(0, 3)$$

$$x=1$$

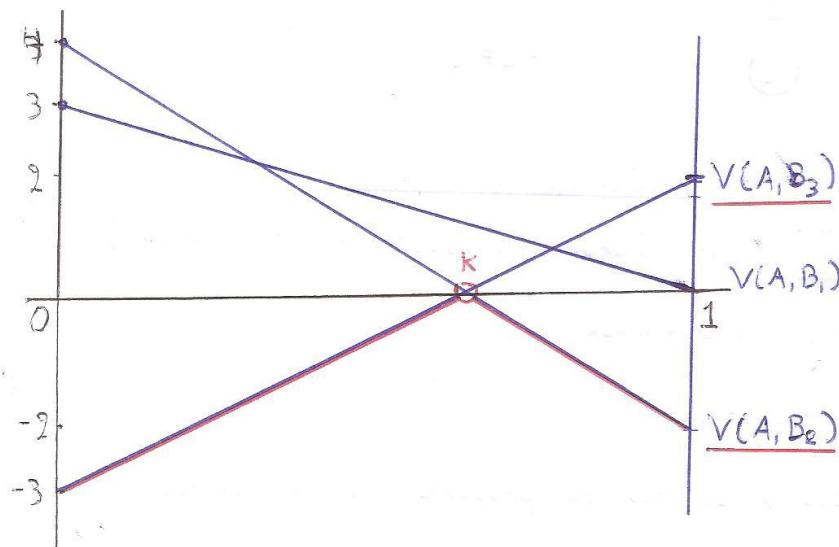
$$(1, 0)$$

$$(0, 4)$$

$$(1, -2)$$

$$(0, -3)$$

$$(1, 2)$$



Η σφραγική B<sub>1</sub> αναπρέπει στην Β<sub>2</sub> και στην Β<sub>3</sub> συμβαίνει στην καθοριστική του maxmin ανάλιση K.

Επίσην ο παίκτης A επιλέξει maxmin σφραγική, αυτό συντηρείται σε επίλογη των διαφορετικών αποτελεσμάτων.

Πλέον, ο πίνακας πληρωμών για την διάσταση 2x2

		B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
		Y	1-Y
πιθανότητα	A <sub>1</sub>	-2	2
	A <sub>2</sub>	4	-3

Επειδόμενη, λοιπόν, το παιχνίδι ως πρόβλημα διάστασης 2x2:

$$V(A, B_2) = 4 - 6x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow V(A, B_2) = V(A, B_3) \Rightarrow 4 - 6x = -3 + 5x$$

$$V(A, B_3) = -3 + 5x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow 7 = 11x$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{11} \text{ και } 1-x = \frac{4}{11}$$

Οπότε η υψηλή παιχνίδια στοιχεία:

$$V = 4 - 6 \cdot \frac{7}{11} = \frac{44}{11} - \frac{42}{11} = \frac{2}{11}$$

Τια τον παικτη B η χουρλή:

-24-

$$\begin{aligned} V(B, A_1) &= -2y + 2(1-y) = 2-4y \\ V(B, A_2) &= 4y - 3(1-y) = -3+7y \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow V(B, A_1) = V(B, A_2) \\ \Rightarrow 2-4y = -3+7y \\ \Rightarrow 11y = 5 \\ \Rightarrow y = \frac{5}{11} \rightarrow 1-y = \frac{6}{11} \end{array} \right\}$$

ΟΠΟΥΣ

$$V = 2-4 \cdot \frac{5}{11} = \frac{22}{11} - \frac{20}{11} = \frac{2}{11}$$

Ιυνοφίσινες το γενικό αποτέλεσμα, είναι το έξι:

- Μεγεθύνοντας την τοποθεσία της παικτης A:  $(\frac{7}{11}, \frac{4}{11}, \frac{0}{11})$
- Μεγεθύνοντας την τοποθεσία της παικτης B:  $(0, \frac{5}{11}, \frac{6}{11})$
- Τηρητικός ποικιλίας  $V = \frac{2}{11}$

Το φυσικό νόημα της κίνησης του ποικιλίου είναι ότι, οι φόροι επαναδημητικής πολιτικής φορούς ή αναβίωσης βέβαιας ιδίως όπου, ή αναβίωσης αιχμών σε ποσοστά του πολιτικού A σε δύο παικτης B, ανιρρήστως σε  $\frac{2}{11}$  της έκτασης ( $0.18\%$ ).

Μάρθα Λαζαρίδη